進研Vもぎ　都立自校作成対策　成績表内
「V challenge!! 高校入試問題に挑戦!」
淑徳巣鴨高等学校　解答

Q 次の問題に答えなさい

（平成30年度入試　数学）

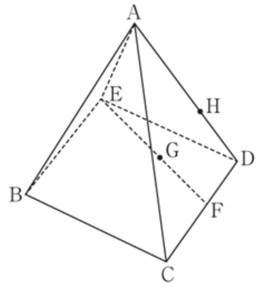
正四角すいA−BCDEは底面の1辺の長さが$3\sqrt{2}$、高さが6である。辺CDを2：1に分ける点をF、線分EFの中点をGとする。また、線分EFを直径とする球と辺ADとの交点をHとする。次の㋐〜㋙に当てはまる数字をマークしなさい。

(1) 辺ABの長さは$\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$である。

(2) 線分AFの長さは$\sqrt{\boxed{ウエ}}$である。

(3) 線分AGの長さは$\sqrt{\boxed{オカ}}$である。

(4) 線分AHの長さは$\dfrac{\boxed{キク}\sqrt{\boxed{ケ}}}{\boxed{コ}}$である。



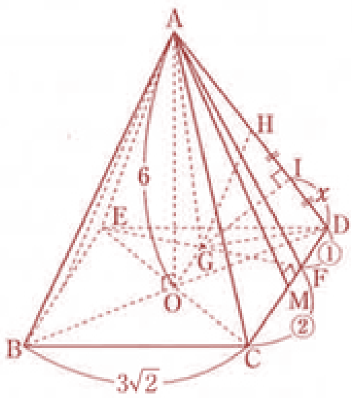
A

（1）ア　3　イ　5
（2）ウ　4　エ　1
（3）オ　3　カ　8
（4）キ　1　ク　1　ケ　5　コ　5

〔空間図形―正四角錐〕

＜基本方針の決定＞(3)　2点A，Gと底面の対角線の交点を結んで直角三角形をつくる。　(4)　点Gから辺ADに垂線を引いて三平方の定理から方程式を立てる。

(1)＜長さ―三平方の定理＞右図で，底面の正方形BCDEの対角線の交点をOとすると，立体A-BCDEは正四角錐だから，AO⊥〔面BCDE〕，AO＝6である。$BD=\sqrt{2}BC=\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6$より，$BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times6=3$だから，△ABOで三平方の定理より，$AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$である。



(2)＜長さ―三平方の定理＞右図で，(1)より，$AC=AD=3\sqrt{5}$である。辺CDの中点をMとすると，AM⊥CDとなり，$DM=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$だから，△AMDで三平方の定理より，$AM=\sqrt{AD^2-DM^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{162}{4}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$となる。また，CF：FD＝2：1より，$FD=\frac{1}{2+1}CD=\frac{1}{3}\times3\sqrt{2}=\sqrt{2}$だから，$MF=DM-FD=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$である。よって，△AMFで三平方の定理より，$AF=\sqrt{AM^2+MF^2}=\sqrt{\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{164}{4}}=\sqrt{41}$となる。

(3)＜長さ―三平方の定理，中点連結定理＞右上図で，2点O，Gを結ぶと，∠AOG＝90°だから，△AOGで三平方の定理より，$AG=\sqrt{AO^2+OG^2}$である。2点O，Gはそれぞれ線分EC，線分EFの中点だから，△ECFで中点連結定理より，$OG=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{2}\times(3\sqrt{2}-\sqrt{2})=\sqrt{2}$となる。よって，$AG=\sqrt{6^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{38}$である。

(4)＜長さ―三平方の定理＞右上図の△EFDで三平方の定理より，$EF=\sqrt{DE^2+FD^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$である。∠EDF＝90°より，点Dは線分EFを直径とする円の周上にあるから，点Dは線分EFを直径とする球の周上の点となり$HG=DG=FG=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}=\sqrt{5}$である。よって，△GDHは二等辺三角形だから，線分DHの中点をIとすると，GI⊥DHとなる。DI＝xとすると，△GDIで三平方の定理より，$GI^2=DG^2-DI^2=(\sqrt{5})^2-x^2=5-x^2$となり，△GAIで，$GI^2=AG^2-AI^2=(\sqrt{38})^2-(3\sqrt{5}-x)^2=-7+6\sqrt{5}x-x^2$だから，$-7+6\sqrt{5}x-x^2=5-x^2$が成り立ち，$x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$となる。したがって，$DH=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$より，$AH=3\sqrt{5}-\frac{4\sqrt{5}}{5}=\frac{11\sqrt{5}}{5}$である。